Chapitre 2 : Ensembles et applications
Feuille d'exercices

Exercice 1
Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble de trois éléments. Les notations suivantes ont-elles un sens ?

1. $a \in E$
2. $a \subset E$
3. $\{a\} \subset E$
4. $\emptyset \in E$
5. $\emptyset \subset E$
6. $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$
7. $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$.

Exercice 2 Soient $E = [\![1, 10]\!]$, $A = \{2, 5, 7\}$, $B = \{1, 5, 7, 9\}$ et $C = \{2, 7, 9, 10\}$.
Déterminez :

1. $A \cup B \cup C$
2. $A \cap B \cap C$
3. $A \cap (B \cup C)$
4. $(A \cap B) \cup C$
5. $\overline{A}$
6. $\overline{A \cap B}$
7. $A \times B$
8. $A \times C$
9. $A \setminus B$

Exercice 3 (*)
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Montrez les assertions suivantes :

1. $(A \cup B = B) \Leftrightarrow A \subset B$.
2. $(A \cap B = A \cup B) \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 4
Déterminer si les applications suivantes sont surjectives, injectives ou bijectives. Précisez la bijection réciproque dans le cas bijectif.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad g_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad g_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_+ & \to & \mathbb{Q}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$.
Montrez que f est bijective et déterminez f^{-1}

Exercice 6
Soient les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.

2. Etudier les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ en précisant leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 7 Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on définit $f : D \to \mathbb{R}$ par, pour tout $(x, y) \in D$,

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + y$$

1. Déterminez le plus grand ensemble D possible (autrement dit : donnez l'ensemble de définition de f...)
2. Etudiez l'injectivité de f.
3. Etudiez la surjectivité de f.

Exercice 8 Déterminez l'ensemble d'arrivée des fonctions suivantes pour en faire des applications surjectives

1. exp avec ensemble de départ $\mathbb{R}$.
2. ln avec ensemble de départ $]0, 1]$
3. sin avec ensemble de départ $[0, \pi]$.
4. cos avec ensemble de départ $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$
5. $x \mapsto 2x - 1$ avec ensemble de départ $[1, 2]$.
6. $x \mapsto x^2$ avec ensemble de départ $[-1, 2]$.

Exercice 9

1. Montrez que l'application $x \mapsto e^x + x$ est injective.
2. Résoudre le système d'équation

$$\begin{cases} x + e^x &= y + e^y \\ x^2 + xy + y^2 &= 27 \end{cases}$$

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

1. f est-elle injective ? Surjective ?
2. Montrez que si on change l'ensemble d'arrivée pour $[-1, 1]$, alors f est surjective.
3. Montrez que la restriction de f à $[-1, 1]$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-1, 1]$. On précisera la bijection réciproque.

Exercice 11

Soient f définie par $f : x \mapsto \dfrac{2x + 1}{x - 2}$

1. Montrez que $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. Calculez $f \circ f$. En déduire que f est bijective et précisez f^{-1}

Exercice 12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose f_n la fonction définie par

$$\forall x \in]0, +\infty[, f_n(x) = x - n \ln(x)$$

1. Dresser le tableau de variation de f_n.
2. Montrez que, lorsque $n \geq 3$, il existe deux réels u_n et v_n solutions de $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

Exercice 13 (*)

Soient E, F et G trois ensembles et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrez que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
2. Même question avec f et g injectives...

Chapitre 2 : Ensembles et applications
Feuille d'exercices

Exercice 1
Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble de trois éléments. Les notations suivantes ont-elles un sens ?

1. $a \in E$
2. $a \subset E$
3. $\{a\} \subset E$
4. $\emptyset \in E$
5. $\emptyset \subset E$
6. $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$
7. $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$.

Exercice 2 Soient $E = [\![1, 10]\!]$, $A = \{2, 5, 7\}$, $B = \{1, 5, 7, 9\}$ et $C = \{2, 7, 9, 10\}$.
Déterminez :

1. $A \cup B \cup C$
2. $A \cap B \cap C$
3. $A \cap (B \cup C)$
4. $(A \cap B) \cup C$
5. $\overline{A}$
6. $\overline{A \cap B}$
7. $A \times B$
8. $A \times C$
9. $A \setminus B$

Exercice 3 (*)
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Montrez les assertions suivantes :

1. $(A \cup B = B) \Leftrightarrow A \subset B$.
2. $(A \cap B = A \cup B) \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 4
Déterminer si les applications suivantes sont surjectives, injectives ou bijectives. Précisez la bijection réciproque dans le cas bijectif.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad g_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad g_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_+ & \to & \mathbb{Q}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$.
Montrez que f est bijective et déterminez f^{-1}

Exercice 6
Soient les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.

2. Etudier les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ en précisant leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 7 Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on définit $f : D \to \mathbb{R}$ par, pour tout $(x, y) \in D$,

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + y$$

1. Déterminez le plus grand ensemble D possible (autrement dit : donnez l'ensemble de définition de f...)
2. Etudiez l'injectivité de f.
3. Etudiez la surjectivité de f.

Exercice 8 Déterminez l'ensemble d'arrivée des fonctions suivantes pour en faire des applications surjectives

1. exp avec ensemble de départ $\mathbb{R}$.
2. ln avec ensemble de départ $]0, 1]$
3. sin avec ensemble de départ $[0, \pi]$.
4. cos avec ensemble de départ $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$
5. $x \mapsto 2x - 1$ avec ensemble de départ $[1, 2]$.
6. $x \mapsto x^2$ avec ensemble de départ $[-1, 2]$.

Exercice 9

1. Montrez que l'application $x \mapsto e^x + x$ est injective.
2. Résoudre le système d'équation

$$\begin{cases} x + e^x &= y + e^y \\ x^2 + xy + y^2 &= 27 \end{cases}$$

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

1. f est-elle injective ? Surjective ?
2. Montrez que si on change l'ensemble d'arrivée pour $[-1, 1]$, alors f est surjective.
3. Montrez que la restriction de f à $[-1, 1]$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-1, 1]$. On précisera la bijection réciproque.

Exercice 11

Soient f définie par $f : x \mapsto \dfrac{2x + 1}{x - 2}$

1. Montrez que $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. Calculez $f \circ f$. En déduire que f est bijective et précisez f^{-1}

Exercice 12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose f_n la fonction définie par

$$\forall x \in]0, +\infty[, f_n(x) = x - n \ln(x)$$

1. Dresser le tableau de variation de f_n.
2. Montrez que, lorsque $n \geq 3$, il existe deux réels u_n et v_n solutions de $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

Exercice 13 (*)

Soient E, F et G trois ensembles et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrez que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
2. Même question avec f et g injectives...